



Star Graph Academy:

découvrez les équations différentielles sur les réseaux !

6èmes Rencontres Mathématiques Valenciennes

Damien Galant

CERAMATHS/DMATHS

Université Polytechnique
Hauts-de-France

Département de Mathématique

Université de Mons
F.R.S.-FNRS Research Fellow



CERAMATHS

UMONS

fnrs
LA LIBERTÉ DE CHERCHER

Jeudi 20 mars 2025

- 1 Qui suis-je?
- 2 Graphes métriques
- 3 L'équation de Schrödinger non-linéaire sur les graphes métriques
- 4 Formulation variationnelle



Mon parcours en un slide

- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;

Mon parcours en un slide

- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;
- 2016–2021: bachelier puis master en sciences mathématiques à l'UMONS (finalité "approfondie"). Master 1 en Erasmus à l'Institut de Mathématique d'Orsay;

Mon parcours en un slide

- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;
- 2016–2021: bachelier puis master en sciences mathématiques à l'UMONS (finalité "approfondie"). Master 1 en Erasmus à l'Institut de Mathématique d'Orsay;
- octobre 2021 – décembre 2024: thèse de doctorat UMONS-UPHF (directeurs: Pr. Christophe Troestler et Pr. Colette De Coster);

Mon parcours en un slide

- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;
- 2016–2021: bachelier puis master en sciences mathématiques à l'UMONS (finalité "approfondie"). Master 1 en Erasmus à l'Institut de Mathématique d'Orsay;
- octobre 2021 – décembre 2024: thèse de doctorat UMONS-UPHF (directeurs: Pr. Christophe Troestler et Pr. Colette De Coster);
- collaborations pendant la thèse: Turin, Besançon;

Mon parcours en un slide

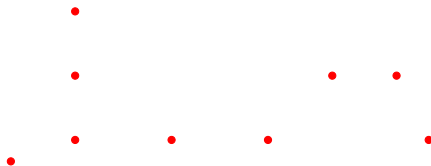
- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;
- 2016–2021: bachelier puis master en sciences mathématiques à l'UMONS (finalité "approfondie"). Master 1 en Erasmus à l'Institut de Mathématique d'Orsay;
- octobre 2021 – décembre 2024: thèse de doctorat UMONS-UPHF (directeurs: Pr. Christophe Troestler et Pr. Colette De Coster);
- collaborations pendant la thèse: Turin, Besançon;
- présent – septembre 2025: chercheur FNRS;

Mon parcours en un slide

- 2012–2016: intérêt pour les mathématiques et l'informatique, olympiades;
- 2016–2021: bachelier puis master en sciences mathématiques à l'UMONS (finalité "approfondie"). Master 1 en Erasmus à l'Institut de Mathématique d'Orsay;
- octobre 2021 – décembre 2024: thèse de doctorat UMONS-UPHF (directeurs: Pr. Christophe Troestler et Pr. Colette De Coster);
- collaborations pendant la thèse: Turin, Besançon;
- présent – septembre 2025: chercheur FNRS;
- octobre 2025 – octobre 2026: postdoctorat à l'université Brown (Providence, Rhode Island, USA).

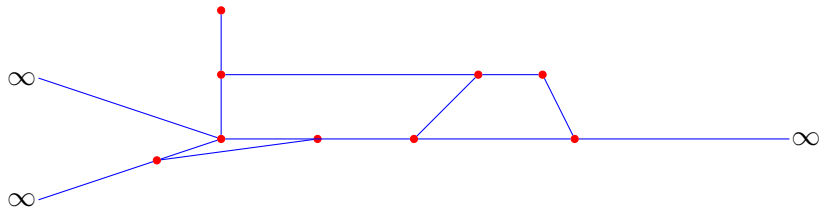
Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique (ou réseau) est formé de **sommets**



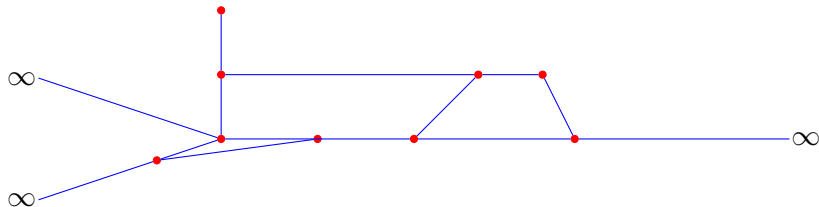
Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique (ou réseau) est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

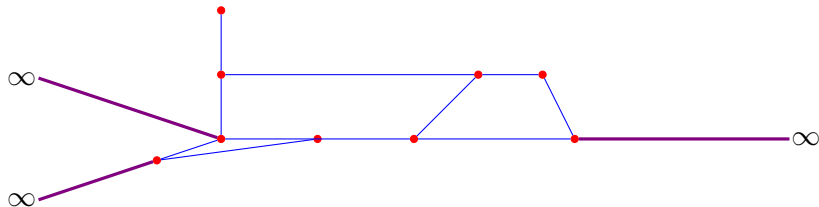
Un graphe métrique (ou réseau) est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



- graphes *métriques*: la longueur des arêtes est importante.

Qu'est-ce qu'un graphe métrique?

Un graphe métrique (ou réseau) est formé de **sommets** et d'**arêtes** joignant les sommets ou allant jusqu'à l'infini.



- graphes *métriques*: la longueur des arêtes est importante.
- les arêtes allant jusqu'à l'infini sont des **demi-droites** et ont une *longueur infinie*.

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite

Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite

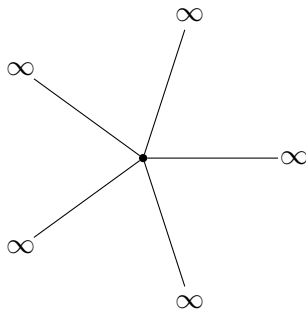
Constructions basées sur des demi-droites



La demi-droite



La droite



L'étoile à 5-branches (*5-star graph*)

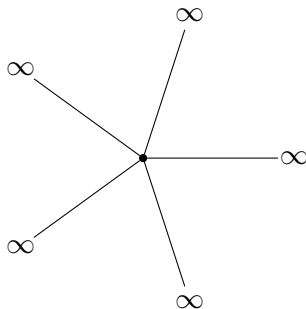
Constructions basées sur des demi-droites



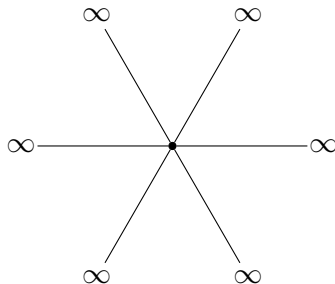
La demi-droite



La droite

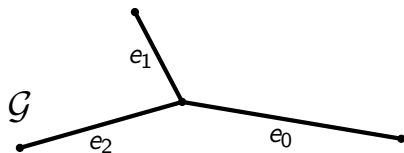


L'étoile à 5-branches (*5-star graph*)



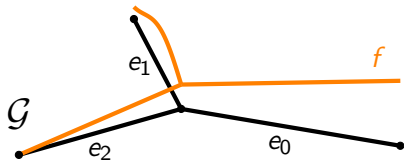
L'étoile à 6 branches (*6-star graph*)

Fonctions définies sur des graphes métriques



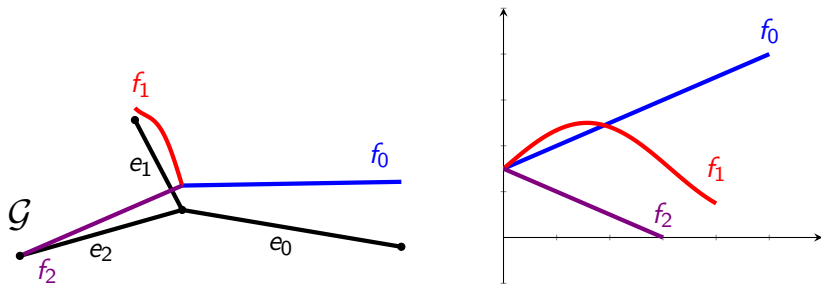
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3)

Fonctions définies sur des graphes métriques



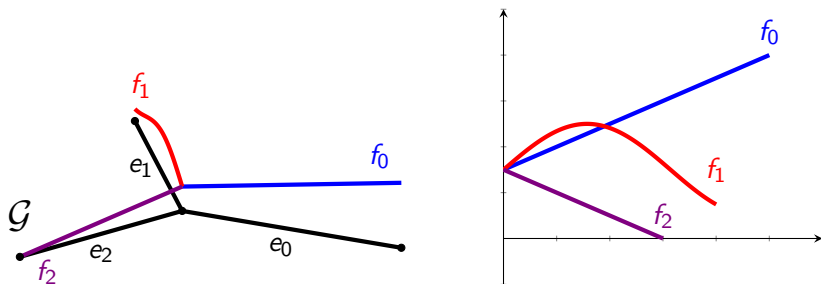
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$

Fonctions définies sur des graphes métriques



Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

Fonctions définies sur des graphes métriques



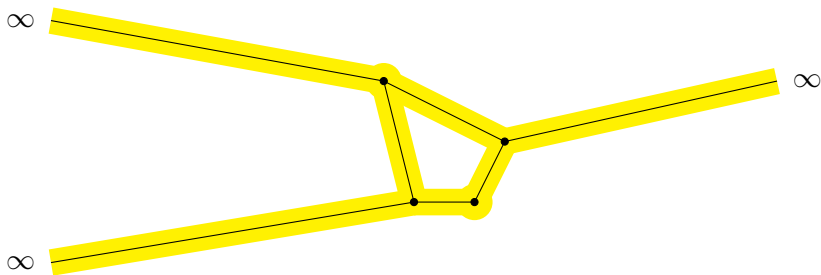
Un graphe métrique \mathcal{G} avec trois arêtes e_0 (longueur 5), e_1 (longueur 4) et e_2 (longueur 3), une fonction $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, et les trois fonctions réelles associées.

$$\int_{\mathcal{G}} f \, dx \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^5 f_0(x) \, dx + \int_0^4 f_1(x) \, dx + \int_0^3 f_2(x) \, dx$$

Pourquoi étudier les graphes métriques?

Motivations physiques

Modéliser des structures où *une seule direction spatiale est importante*.



Un « graphe épais » et le graphe métrique sous-jacent

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u \quad \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} u'_e(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} u'_e(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right.$$

où la condition sur la somme des dérivées s'appelle la *condition de Kirchhoff*.

Le système différentiel

Étant données des constantes $p > 2$ et $\lambda > 0$, nous sommes intéressés par les solutions $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ **continues** du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{ll} -u'' + \lambda u = |u|^{p-2}u & \text{pour chaque arête de } \mathcal{G}, \\ u \text{ converge vers } 0 \text{ à l'infini} & \text{pour chaque demi-droite de } \mathcal{G}, \\ \sum_{e \succ v} u'_e(v) = 0 & \text{pour chaque sommet } v \text{ de } \mathcal{G}, \end{array} \right. \quad (\text{NLS})$$

où la condition sur la somme des dérivées s'appelle la *condition de Kirchhoff*.

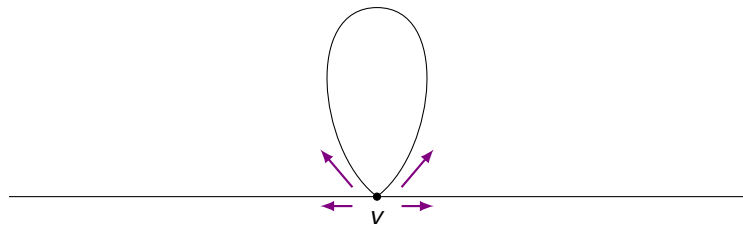
Condition de Kirchhoff: sommets de degré 1



$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{u(v+t) - u(v)}{t} = 0$$

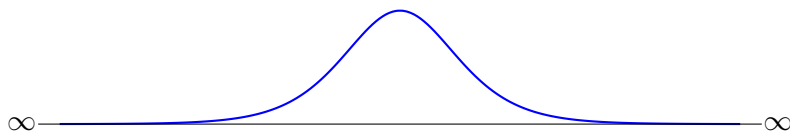
Condition de Kirchhoff dans le cas général

Dérivées sortantes



$$\sum_{e \succ v} u'_e(v) = 0$$

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

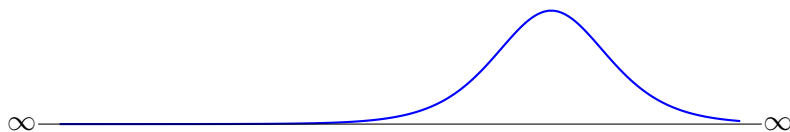
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2} u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

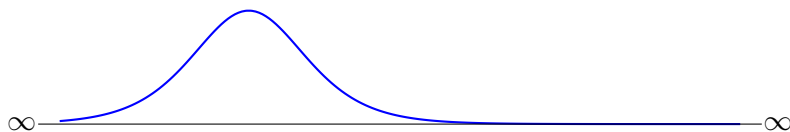
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2} u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La droite réelle: $\mathcal{G} = \mathbb{R}$



L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

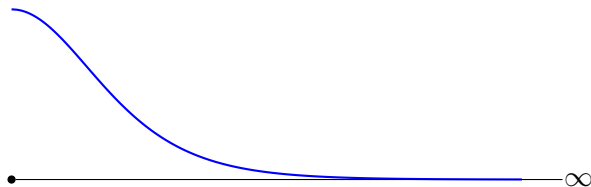
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x + a) \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

où le *soliton* φ_λ est l'unique solution paire et strictement positive de

$$-u'' + \lambda u = |u|^{p-2} u$$

qui converge vers 0 en l'infini.

La demi-droite: $\mathcal{G} = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

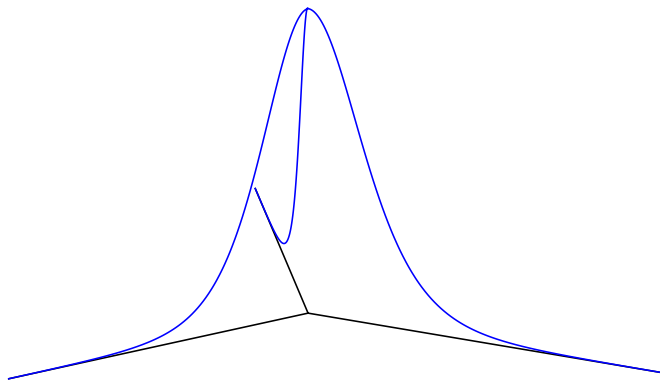


L'ensemble des solutions de (NLS) est donné par

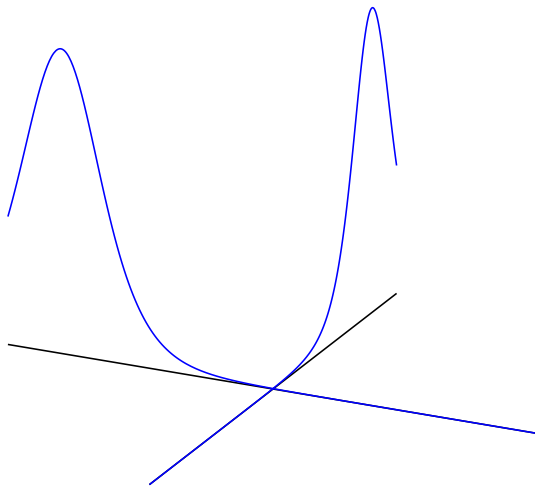
$$\left\{ \pm \varphi_\lambda(x) \Big|_{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Les solutions sont des *demi-solitons*: plus de translations!

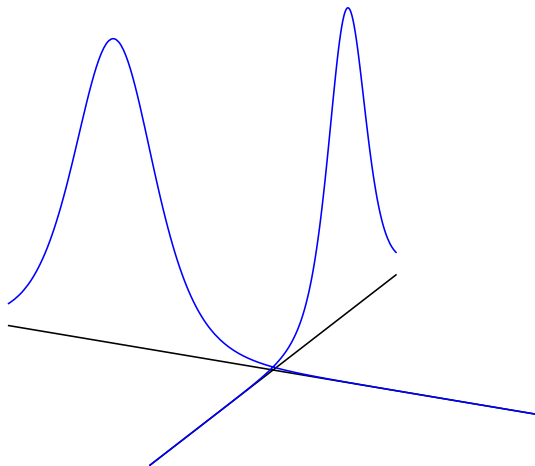
La solution positive sur l'étoile à 3 branches



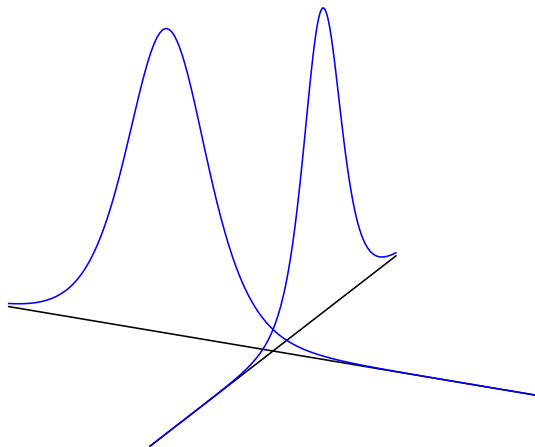
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



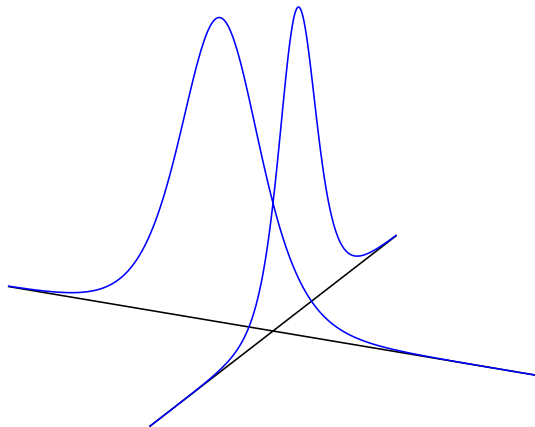
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



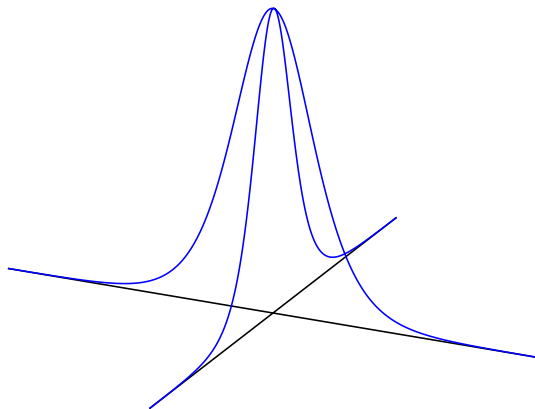
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



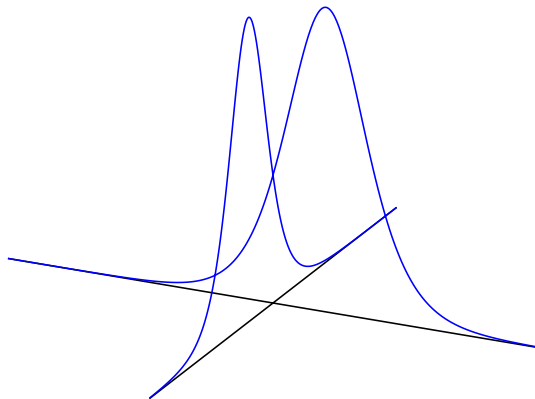
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



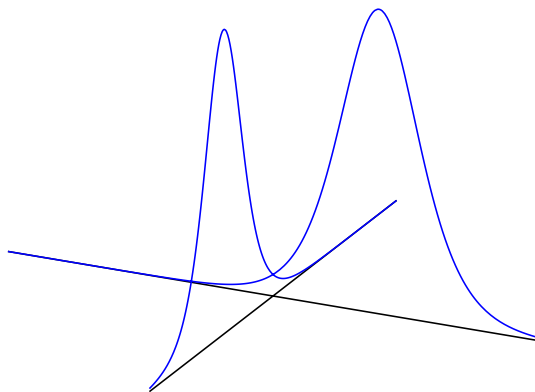
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



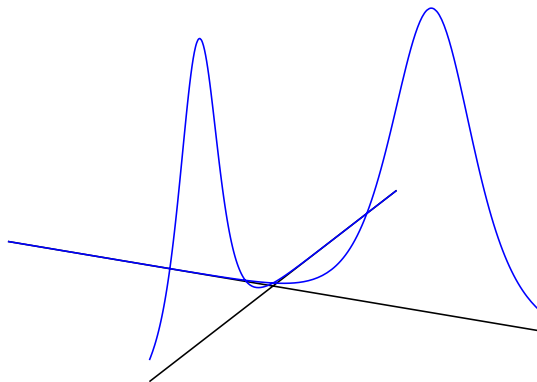
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



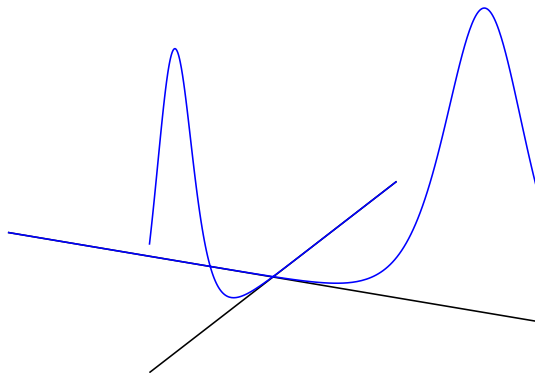
Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Une famille continue de solutions sur l'étoile à 4 branches



Besoin d'une approche plus conceptuelle

- Dans les exemples des graphes en étoile, on peut calculer « à la main » toutes les solutions car les graphes sont simples. En particulier, ils n'ont qu'un sommet.

Besoin d'une approche plus conceptuelle

- Dans les exemples des graphes en étoile, on peut calculer « à la main » toutes les solutions car les graphes sont simples. En particulier, ils n'ont qu'un sommet.
- Pour montrer l'existence de solutions sur des graphes ayant une structure plus riche, il est utile de disposer d'une approche plus conceptuelle.

Dérivées directionnelles

Définition (Dérivée directionnelle)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $u, v \in E$. La dérivée directionnelle de J en u dans la direction v est définie par

$$\partial J(u)[v] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

pourvu que cette limite existe.

Dérivées directionnelles

Définition (Dérivée directionnelle)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $u, v \in E$. La dérivée directionnelle de J en u dans la direction v est définie par

$$\partial J(u)[v] \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t},$$

pourvu que cette limite existe.

Définition (Point critique)

Avec les notations précédentes, on dit que $u \in E$ est un **point critique** de J si et seulement si $\partial J(u)[v] = 0$ pour tout $v \in E$.

La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

Remarque

La fonction J_λ est définie sur un espace vectoriel **de fonctions** (de dimension infinie), d'où son nom de **fonctionnelle** d'action.

La fonctionnelle d'action

Étant donnée une fonction $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, son *action* est définie par

$$J_\lambda(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} |u'|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{G}} |u|^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathcal{G}} |u|^p.$$

Remarque

La fonction J_λ est définie sur un espace vectoriel **de fonctions** (de dimension infinie), d'où son nom de **fonctionnelle** d'action.

Proposition

Une fonction (assez régulière et convergeant vers 0 à l'infini) $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution du système différentiel (NLS) si et seulement si u est un point critique de J_λ .

Exemple de résultat “variationnel”: le théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\partial f(\xi) = 0$.

Exemple de résultat “variationnel”: le théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\partial f(\xi) = 0$.

Idee de la preuve.

La fonction f étant continue sur le **compact** $[a, b]$, elle y atteint son minimum en un certain point x_* . Un petit raisonnement montre qu'on peut se ramener au cas où x_* appartient à $]a, b[$. Alors $\partial f(x_*) = 0$. □

Exemple de résultat “variationnel”: le théorème de Rolle

Théorème (Théorème de Rolle)

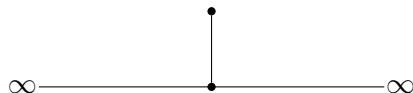
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\partial f(\xi) = 0$.

Idee de la preuve.

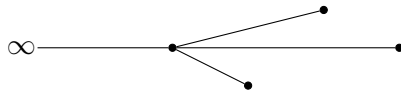
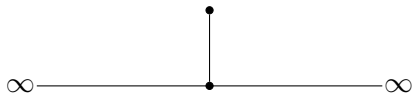
La fonction f étant continue sur le **compact** $[a, b]$, elle y atteint son minimum en un certain point x_* . Un petit raisonnement montre qu'on peut se ramener au cas où x_* appartient à $]a, b[$. Alors $\partial f(x_*) = 0$. □

⚠ La compacité manque souvent en dimension infinie ⚠

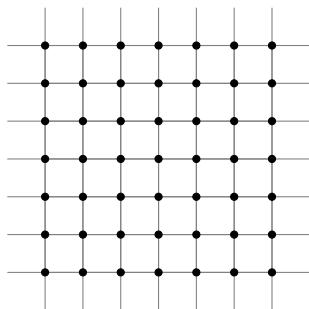
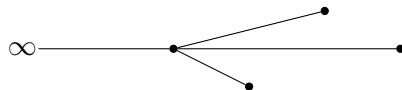
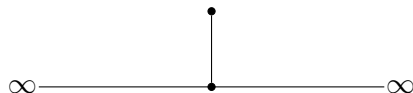
Exemples de graphes où l'approche variationnelle prouve l'existence de solutions



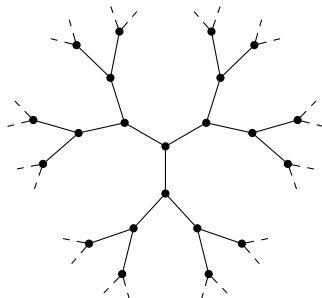
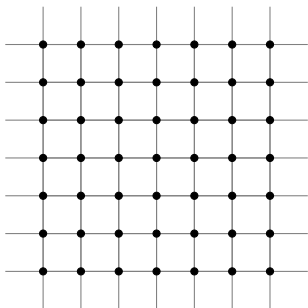
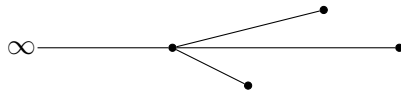
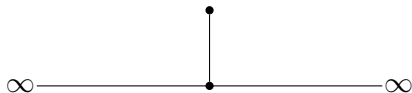
Exemples de graphes où l'approche variationnelle prouve l'existence de solutions



Exemples de graphes où l'approche variationnelle prouve l'existence de solutions



Exemples de graphes où l'approche variationnelle prouve l'existence de solutions

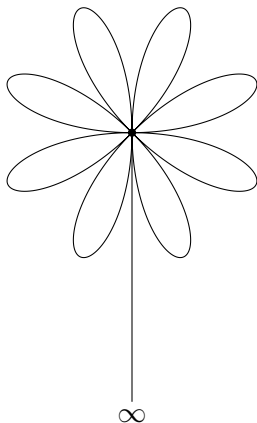


Un problème ouvert

Conjecture


*Tous les graphes avec un nombre fini d'arêtes, **dont des demi-droites**, possèdent au moins une solution de (NLS) non-nulle.*

Merci pour votre attention!




Références


Introductions au sujet:

 R. Adami *Ground states of the Nonlinear Schrodinger Equation on Graphs: an overview (Lisbon WADE)*.
<https://www.youtube.com/watch?v=G-FcnRVvoos> (2020).

 R. Adami, E. Serra, P. Tilli *Nonlinear dynamics on branched structures and networks*. Riv. Math. Univ. Parma (N.S.) 8.1 (2017).

 A. Kairzhan, D. Noja, D. Pelinovsky *Standing waves on quantum graphs*. J. Phys. A: Math. Theor. 55 243001 (2022).

Un article de recherche:

 C. De Coster, S. Dovetta, D. Galant, E. Serra, C. Troestler. *Constant sign and sign changing NLS ground states on noncompact metric graphs*, [arXiv:2306.12121](https://arxiv.org/abs/2306.12121) (2023).